الفصل الثاني

القياسات والأخطاء

Measurements and Errors

2- القياسات والاخطاء Measurements and Errors

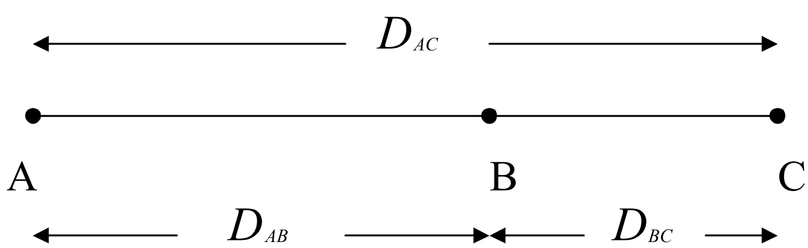
2-1 انواع القياسات: Type of measurements

تقسم القياسات الى نوعين

1- القياسات المباشرة"Direct Measurements" :
ان اي متغير "variable" في اعمال المساحة يتم قياسه مباشرة دون اجراء اي عملية حسابية يسمى بالقياس المباشر.

2- القياسات الغير مباشرة"Indirect Measurements" :
ان اي متغير "variable" في اعمال المساحة يتم الحصول على قيمتة من خلال اجراء الحسابات بأستخدام علاقات رياضية تربط هذا المتغير بمتغيرات اخرى يسمى بالقياس غير المباشر.

مثال:
في الشكل (2-1) ادناه , لغرض قياس المسافة الافقية بين النقطتينA,C بأستخدام شريط القياس "Tape" تم تجزئة الخط المستقيم AC الى جزئين AB,BC حيث كان طول كل من الجزئين AB,BC اقل من (او يساوي) طول شريط القياس المستخدم في القياس .
لذلك يعتبر قياس المسافة الافقية D_{AB} والمسافة الافقية D_{BC} عبارة عن قياسات مباشرة , لأنه تم الحصول عليها مباشرة دون اجراء اي عملية حسابية بأستخدام علاقات رياضية تربط المتغير بمتغيرات اخرى.



شكل (2-1)" القياس المباشر والقياس الغير المباشر"

اما قياس المسافة الافقية D_{AC} يعتبر قياس غير مباشر لأنه تم الحصول عليه بأستخدام علاقة رياضية تربط المتغير D_{AC} بمتغيرات اخرى (D_{AB},D_{BC})

$$D_{AC} = D_{AB} + D_{BC}$$

2 -2 وحدات القياس units of measurement

هنالك نوعان من وحدات القياس:

1. وحدات القياس الخطية linear measurement units
2. وحدات القياس الزاوية angular units of measurement

2-2-1 وحدات القياس الخطية linear measurement units

يوجد نظامان لوحدات القياس الخطية:

1. النظام المتري

وحدات هذا النظام من الاكبر الى الاصغر هي:

1. الكيلومتر ويرمز لها بالرمز km
2. المتر ويرمز لها بالرمز m
   حيث ان 1km=1000m
3. السانتيمتر ويرمز لها بالرمز cm
   حيث ان 1m=100cm
4. المليمتر ويرمز لها بالرمز mm
   حيث ان 1cm=10mm
5. المايكروميتر ويرمز لها بالرمز μm
   حيث ان 1mm 1000 μm

2. النظام الانكليزي

وحدات هذا النظام , من الاكبر الى الاصغر هي

Mile← ft ← inch

حيث ان 1 inch ≅ 2.54 cm

لابد من الاشارة هنا الى ان وحدة قياس المساحة (Area)هي **m^2** وان الوحدة الاكثر استخداما هي هكتار حيث ان $1hectare(ha)=10000m^2$

اما الحجم "Volume"فأن وحدة القياس هي **m^3**

2-2-2 وحدات القياس الزاوية Angular units of measurement

هنالك ثلاثة انظمة لوحدات قياس الزاوية

1- **النظام الستيني "degree"**

في هذا النظام يقسم محيط الدائرة الى 360 درجة(degree)وان الدرجة يرمز لها بالرمز(o)اي ان 1درجة 1degree 1^0

- وان كل درجة مقسمة الى 60 دقيقة , ويرمز للدقيقة بالرمز (') ,اي ان 1دقيقة 1minute 1'

$\Leftarrow \mathbf{1^o = 60'}$

- وان كل دقيقة مقسمة الى 60 قسم كل قسم من هذة الاقسام يسمى ثانية "second"ويرمز للثانية بالرمز ("),اي ان 1ثانية 1second 1"

$\Leftarrow \mathbf{1'\ \ 60''}$

لذلك"3600 1^0

2- النظام المئوي "grad"

في هذا النظام يقسم محيط الدائرة الى 400 قسم , كل قسم من هذه الاقسام يسمى (grad)ويرمز له بالرمز (g)

اي ان 1grad $\mathbf{1^g}$

- وان كل "grad" مقسم الى (100)قسم ,كل قسم من هذه الاقسام يسمى "centigrade" ويرمز له بالرمز (cg)

اي ان 1centigrade 1^{cg}

$^{cg}\Leftarrow 100\ \ 1^g$

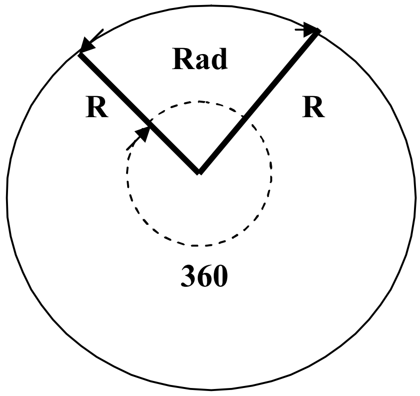
←وان كل centigrade مقسم الى (100)قسم ,كل قسم من هذه الاقسام يسمى centicentigrad ويرمز له بالرمز (ccg),

1 centicentigrad 1^{ccg}

$1^{ccg} =$ 1 centicentigrad $\rightarrow 1^{cg} = 100^{ccg} \rightarrow 1^g = 10000\ ^{ccg}$

3-النظام الدائري (القطري) "Radian"

وحدة القياس في هذا النظام يسمى (rad) وهو عبارة عن الزاوية المركزية المقابلة الى قوس دائري طوله يساوي نصف قطر الدائرة كما هو مبين في الشكل



اي ان :-

$$2\pi \ R \ rad = 360^{o} \ R$$

$$2 \ rad \ \pi \quad 360^{o}$$

$$\frac{360^{o}}{2\pi} = 57^{o}.2958 = 57^{o}17^{/}44.8^{//} \ 1rad \Rightarrow$$

$$1rad = \frac{180^{o}}{\pi}$$

مثال:- زاويه مقدارها 0.5 rad , ما هي قيمه الزاويه في النظام الستيني .

الحل:-

قيمه الزاويه في النظام الستيني قيمه الزاويه في النظام الدائري * $\frac{180}{\pi}$

$$\frac{180}{\pi}*0.5$$

مثال:- زاويه مقدارها ("12° 15'26) , ماهي قيمة الزاوية بالنظام الدائري

الحل:-

قيمة الزاوية بالنظام الدائري (rad)=قيمة الزاوية بالنظام الستيني * $\frac{\pi}{180}$

$$rad = \frac{\pi}{180}(12 + \frac{15}{60} + \frac{26}{3600})$$

2-3 مقياس الرسم :- " Scale"

يمكن تعريف مقياس الرسم على النحو الاتي :-
هو عبارة عن طول خط مستقيم معين على الخارطة مقسوماً على طول نفس الخط على الارض وذلك بأستخدام نفس وحدة القياس.
اي أن:

$$\text{Scale} = \frac{\text{Distance on map}}{\text{Distance on ground}} \qquad \frac{\text{المسافة على الخارطة}}{\text{المسافة على الارض}} \quad \text{مقياس الرسم}$$

التمثيل النسبي لمقياس الرسم :-
بشكل عام يستخدم التمثيل النسبي لمقياس الرسم وذلك لسهولة التعامل معه ,

$$\text{Scale} \quad \frac{\text{One unit on map}}{\text{Number of units on ground}} = \frac{\text{وحدة واحدة على الخارطة}}{\text{عدد الوحدات على الارض}}$$

مثال :-
اذا كانت المسافة الافقية بين النقطتين a , b على الخارطة 25cm (D_{ab}=25cm) وكانت المسافة الافقية بين نفس النقطتين A,B على الارض 500m =(D_{AB}=500m) , فما هو مقياس رسم الخارطة ؟

الحل :- لغرض حساب مقياس الرسم "scale" يجب اولاً توحيد وحدة القياس ;
على الخارطة $D_{ab} = 25cm$
على الارض $D_{AB} = 500m = 500*100 = 50000cm$

$$\text{Scale} = \frac{25}{50000} = \frac{1}{\frac{50000}{25}} = \frac{1}{2000}$$

اي انه [1cm] على الخارطة يمثل [20m=2000cm] على الارض .

او [1mm] على الخارطة يمثل [2m=2000mm] على الارض .

3- 2 الاخطاء Errors

2-4-1 تعريف الخطأ Definition of error

يمكن تعريف الخطأ على اساس انه يمثل الفرق ما بين القيمه المقاسة "Measured Value" والقيمة الحقيقة "True Value" لأي متغير "variable" في اعمال المساحة , اي ان الخطأ القيمة المقاسة - القيمة الحقيقية

Error = Measured Value - True Value

$e = x_m - x_t$

حيث ان :-

e = الخطأ

X_m= القيمة المقاسة

X_t= القيمة الحقيقية

وبهذا اذا كانت القيمة المقاسة اكبر من القيمة الحقيقية تكون قيمة الخطأ موجبة ,اي انه توجد زيادة في القياس مقدارها قيمة الخطأ e, والعكس صحيح.

لابد من الاشارة هنا الى ان القيمة الحقيقية لأي متغير في اعمال المساحة مجهوله ولايمكن الحصول عليها بأي شكل من الاشكال , وعليه فأن القيمة الحقيقية للأخطاء تكون مجهوله "غير معروفة" ايضا.

2-4-2 انواع الاخطاء Types of Errors

تقسم الاخطاء الى نوعين:-

1- الاخطاء المنتظمة "Systematic Errors"

2- الاخطاء العشوائية "Random Errors"

1- الاخطاء المنتظمة "Systematic Errors"

وهي الاخطاء التي تتبع الى نظام معين وتكون اما موجبة " + "او سالبة " – " اي انها اما تكون زيادة او نقصان , ويمكن التصحيح للاخطاء المنتظمة من خلال تطبيق علاقات رياضية تمثل الخطأ .

لابد من الاشارة هنا الى انه في حالة عدم التصحيح للاخطاء المنتظمة (ان وجدت) , سوف تبقى في القياس ويتم التعامل معها لاحقا اسوة بالاخطاء العشوائية.

2-الاخطاء العشوائية "Random errors"

وهي الاخطاء التي لاتتبع نظام معين (عشوائية) ولذلك من المحتمل ان تكون موجبة (+ = زيادة) ومن المحتمل ان تكون سالبة (- = نقصان) ,اي ان أتجاه الخطأ العشوائي غير معروف فمن المحتمل ان يكون (+) ومن المحتمل ان يكون (-) ويجب دائما وضع الأشارة (±) امام قيمة الخطأ العشوائي .

وأن هذا يعني انه لا يمكن التصحيح للأخطاء العشوائية وأنما يمكن تقليل تأثيرها (قيمتها) وايجاد القيمة الاكثر أحتمالية "Most probable value" والتي تمثل أفضل قيمة للمتغير المقاس من خلال تطبيق علاقات أحصائية معينة , أهمها طريقة المربعات الصغرى "least squares method" والتي سوف يتم التطرق لها تفصيليا لاحقا .

2-4-3 مصادر الاخطاء Sources of Errors

الاخطاء في القياسات لها ثلاث مصادر رئيسية :

1- الطبيعة "Nature"

تحصل الاخطاء نتيجة لحصول اختلال في الظروف الجوية أثناء أخذ القياسات , مثلا التفاوت في درجة الحرارة ,الريح ,أنكسار الضوء,الخ ...

لذلك عند اجراء القياسات في أعمال المساحة , يجب أن تنفذ في ظروف جوية ملائمة "معتدلة" بحيث تكون الاخطاء الناجمة عن ذلك في حدها الادنى .

2-الأجهزة " Instruments"

تحصل الاخطاء أيضا لوجود عيب ما في الجهاز المستخدم في القياس . وعليه يجب دائما معايرة الاجهزة "Calibration" وبشكل منتظم (دوري) وتحديد مدى صلاحيتها لاجراء القياسات .

3- شخصية "Personal"

كل شخص معرض للخطأ عند اجراء أي قياس مهما كان نوع القياس بسيط ,أي ان الاخطاء الشخصية موجودة لامحال , وهي عبارة عن أخطاء عشوائية وتختلف من شخص الى أخر , وكل مايمكن عمله هو تقليل تأثيرها من خلال أبداء أكثر مايمكن من انتباه وتركيز وخبرة عند اجراء القياس وكذلك تكرار القياس .

2 -5 الاغلاط Mistakes

الغلط "Mistake" هو ليس بالخطأ "Error" قيمته كبيرة نسبياً مقارنتاً بقيمة الاخطاء ويكون متأتي نتيجة اهمال او سهو عند الشخص الذي يقوم بأجراء او تسجيل القياس .

لابد من الاشارة هنا الى أنه بالامكان أن تكون القياسات و/ أو " and / or" النتائج المترتبة على ذلك غلط "Mistake" نتيجة أستخدام اسلوب غلط عند اجراء الحسابات أو التنفيذ الغلط في العمل المساحي عند أخذ القياسات .

من خلال ماتبين أعلاه فأن القياس الغلط لا يمكن الاعتماد عليه بأ ي شكل من الاشكال , وعليه يجب أكتشاف القياس الغلط (من خلال تكرار القياس), وازالته (حذفه) , وبخلاف ذلك , اي انه اذا لم يتم معرفة القياس الغلط , يجب اعادة العمل المساحي بالكامل .

2-6 الدقة والاتقان Accuracy and Precision

الدقة "Accuracy"و الاتقان"Precision" مصطلحان يستخدمان في المساحة لوصف مدى جودة القياس والعمل المساحي بشكل عام . الا انه في الغالب يتم استخدامها بالتبادل دون الانتباه الى أي منهما يجب استخدامه لوصف القياس من الناحية العلمية اي انه هل يجب القول بان القياس دقيق او متقن ؟ هل يجب استخدام مصطلح الدقة "Accuracy"او مصطلح الاتقان "Precision" لوصف مدى جودة اي عمل مساحي ؟

ان المفهوم العلمي للدقة والاتقان هو:

الدقة "Accuracy"

عبارة عن مدى تقارب قياسات متغير "variable" معين في اعمال المساحة من القيمة الحقيقية للمتغير . فكلما كانت القياسات متقاربة بشكل اكبر من القيمة الحقيقية يكون العمل ادق .

بما ان القيمة الحقيقية "True value" لاي متغير "variable" في اعمال المساحة مجهولة , لذلك فنحن في واقع الحال لانتعامل مع الدقة في اي عمل مساحي انما نتعامل مع الاتقان "precision" .

<u>الا تقان "precision"</u>

عبارةعن مدى تقارب قياسات متغير "variable"معين في أعمال المساحة من بعضها. فكلما كانت القياسات متقاربة من بعضها بشكل أكبر يكون العمل متقن بشكل أكبر.

من خلال ماتبين أعلاه فأن العمل المتقن ليس من الضروري أن يكون عملاً دقيقاً , بينما الدقة العالية تتطلب وجود أتقان عالي . من الناحية النظرية , ان الفرق ما بين الدقة والاتقان هو وجود الاخطاء المنتظمة , ففي حالة التصحيح لجميع الاخطاء المنتظمة يكون العمل المتقن دقيقاً في نفس الوقت .

2-7 تعديل القياسات Adjustment of Measurements

نظراً لكون القيمة الحقيقية لأي متغير "variable" في أعمال المساحة مجهولة ومن غير الممكن الحصول عليها , لذلك عند أخذ القياسات لأي متغير "variable" في أعمال المساحة فنحن نبحث عن الحصول على أفضل قيمة للمتغير , أي القيمة الأقرب الى القيمة الحقيقية والمتمثلة بالقيمة الأكثر أحتمالية "Most Probable Value"

هنالك ثلاث عوامل يجب التعامل معها عند أخذ القياسات لمتغير معين :

1. وجود قياس أو قياسات غلط "Mistakes"
2. وجود أخطاء منتظمة "Systematic Errors"
3. وجود اخطاء عشوائية "Random Errors"

لذلك , لغرض حساب القيمة الأكثر أحتمالية "Most probable value" (والتي تمثل أفضل قيمة) للمتغير "variable" المقاس يجب أتباع الخطوات الآتية وعلى التوالي :-

1- أكتشاف وأزالة (حذف) القياسات الغلط "mistakes" ان وجدت وبخلافه يجب اعادة العمل المساحي .

2- تصحيح القياسات للاخطاء المنتظمة ان وجدت وبخلافه سوف تتم معاملتها معاملة الأخطاء العشوائية لاحقاً .

3- بعد أجراء الخطوات (2,1) أعلاه , اصبح لدينا الآن قياسات لمتغير "variable" معين فيها أخطاء عشوائية "Random Error" فقط , في هذه الحالة يمكن حساب القيمة الأكثر احتمالية "Most probable Value" للمتغير " variable" باستخدام طرق احصائية معينة والتي سوف يتم التطرق لها تفصيلياً لاحقاً .

2-7-1 القيمة الأكثر أحتمالية والخطأ القياسي للقياسات المباشرة
"Most probable value and the standard error for direct measurements"

2-7-1-1 القيمة الأكثر احتمالية للقياسات المباشرة
"Most probable value for direct measurements"

أشارةً الى ما تم ذكره في (2-7) أعلاه بعد اجراء الخطوة الاولى (ازالة "حذف "القياسات الغلط "mistake") ومن ثم اجراء الخطوة الثانية (التصحيح للاخطاء المنتظمة) أصبح لدينا الان عدد(n) من القياسات ($x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots,x_n$) المباشرة لنفس المتغير "variable" (أي انه تم تكرار قياس المتغير "n" من المرات) وان هذة القياسات تحتوي على اخطاء عشوائية " random errors" فقط , اضافة الى ذلك لو فرض ان جميع هذة القياسات قد تمت بأستخدام نفس الجهاز ونفس الدرجة من العناية (لها نفس الوزن "weight") في هذة الحالة فأن المعدل " mean" يمثل القيمة الاكثر احتمالية " Most probable value" = افضل قيمة للمتغير "variable" ,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad .... [2\text{-}1]$$

حيث ان :-

n = عدد مرات تكرار القياس للمتغير

x_i = القياس الاول , الثاني ,.........., القياس n للمتغير

$\bar{x}$ = المعدل = القيمة الاكثر احتمالية للمتغير

= افضل قيمة للمتغير

2-7-1-2 الخطأ القياسي للقياسات المباشرة "Standard error for direct measurement"

الخطأ القياسي لأي قياس (الاول , الثاني , ...,او n) من قياسات المتغير يمكن حسابه بتطبيق العلاقة الأحصائية الأتية :-

$$\delta_{x_i} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n-1}} \quad ..... \quad [2\text{-}2]$$

حيث أن :-

$$\sum_{i}^{n} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$$

residual v_i = Error in measurement

$v_i = x_i - \bar{x} =$ الخطأ المتبقي في القياس

$\bar{x}$ المعدل

$\delta_{xi} =$ الخطأ القياسي لأحد هذة القياسات

الخطأ القياسي للمعدل والذي يمثل الخطأ القياسي للقيمة الأكثر احتمالية (افضل قيمة) للمتغير المقاس هو :-

$$\delta_{\bar{x}} \quad \pm \quad \frac{\delta_{xi}}{\sqrt{n}} \quad .... \qquad [2\text{-}3]$$

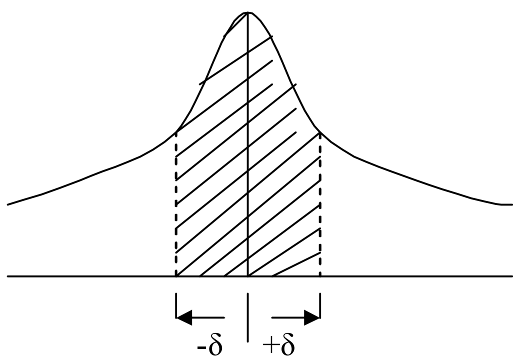
حيث أن ,

$\delta_{\bar{x}}$ = الخطأ القياسي للمعدل .
= الخطأ القياسي للقيمة الاكثر احتمالية للمتغير المقاس .
= الخطأ القياسي لأفضل قيمة للمتغير المقاس .

لابد من التأكيد هنا على ضرورة وضع اشارة (±) امام قيمه الخطاء القياسي كما هو مبين اعلاه في المعادلات (2-2) و(3-2) لانه يمثل خطاء عشوائي .

2-7-1-3 تمثيل الاخطاء في اعمال المساحة

هنالك عدد من المصطلحات المستخدمة لوصف الاخطاء العشوائية المتبقية ("residual errors "v") في قياسات اعمال المساحة , جميعها يستند الى كون توزيع الاخطاء العشوائية " v" هو عبارة عن توزيع طبيعي "Normal distribution", لذلك فائ منحني توزيع الاخطاء العشوائية "v" في قياسات اي متغير منحني التوزيع الطبيعي "distribution curve



1-**الخطأ القياسي " δ " :-**
وهو من اهم واكثر والمصطلحات المستخدمة لتمثيل الخطأ في اعمال المساحة.
ان المساحة المحصورة تحت منحني التوزيع الطبيعي مابين δ+ و δ- تمثل 68.27% من المساحة الكلية وهذا يعني:

أ- 68.27% من القياسات يقع ضمن" $\bar{x}+\delta$" و "$\bar{x}-\delta$" .
ب- القيمة الحقيقية لها احتمالية 68.27% من الوقوع ضمن حدود الخطأ القياسي .

-2 "E_{50}" الخطأ المحتمل " probable error":-

اي ان 50% من القياسات يقع ضمن حدود E_{50} ،حيث ان

$$E_{50} = 0.6745\delta$$

ان هذا النوع "E_{50}" ، نادرا ما يستخدم في الوقت الحاضر .

-4 E_{90}, E_{95}:-

اي ان 90% من القياسات يقع ضمن حدود E_{90}

وان 95% من القياسات يقع ضمن حدود E_{95}

حيث ان :

$$E_{90} = 1.6449\delta$$

$$E_{95} = 1.9599\delta$$

ان الاخطاء E_{90} ،E_{95} تستخدم لوصف الاتقان "precision" المطلوب في مشاريع المساحة "Surveying projects" .

-5 $E_{99.7}$:-

اي ان 99.7% من القياسات يقع ضمن حدود $E_{99.7}$ ويسمى $E_{99.7}$ بالخطأ الاقصى "maximum error" ، اي انه يمثل اعلى حد للاخطاء " v" مسموح به . وعادة ما يصطلح عليه خطأ " 3δ" ويستخدم لاكتشاف القياسات الغلط "Mistakes" ، حيث ان اي قياس فيه قيمة خطأ متبقي " v" اكبر من " 3δ" [$V_{\hat{\wedge}} > 3\delta$] يعتبر قياس " $\wedge$" قياس غلط "Mistake" وعليه يجب ازالته (حذفه) .

2-7-2 نظرية تراكم الاخطاء Theory of Error propagation

يمكن تقسيم حساب القيمة الاكثراحتمالية والخطأ القياسي للقياسات غير المباشرة الى حالتين :-

1- بألامكان حساب قيمة واحدة للقياس غير المباشر .

2- بألامكان حساب اكثر من قيمة للقياس او القياسات غير المباشرة .

2-7-2-1 بألامكان حساب قيمة واحدة للقياس غير المباشر :-

في هذة الحالة من الممكن حساب قيمة واحدة للقياس غير المباشر "y " من خلال تطبيق علاقة رياضية تربط هذا المتغير "y" بمتغيرات اخرى ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) , وان هذة المتغيرات ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) عبارة عن قياسات مباشرة او غير مباشرة قيمتها معلومة والخطأ القياسي لكل منها معلوم ايضاً .

اي انه توجد دالة رياضية تربط القياس غير المباشر "y" بالمتغيرات ($x_1,x_2,\ldots,x_n$)

$$y = f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad \ldots \ldots \qquad [2\text{-}4]$$

القيمة الاكثر احتمالية للقياس غير المباشر :-

يمكن حساب القيمة الاكثر احتمالية (افضل قيمة) للقياس غير المباشر "y" من خلال تطبيق الدالة الرياضية [2-4] التي تربط المتغير "y"بالمتغيرات $(\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n})$) .

الخطأ القياسي للقياس غير المباشر :-

من الممكن حساب الخطأ القياسي " standard error" للقياس غير المباشر (δ (y)من خلال تطبيق قانون تراكم الاخطاء "Low of error propagation" على الدالة الرياضية [2-4] التي تربط القياس غير المباشر "y" بمتغيرات اخرى($\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}$) وان كل من هذة المتغيرات ($\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_n}$) عبارة عن قياس مباشر او غير مباشر قيمته معروفة والخطأ القياسي له معروف ايضاً.

ان قانون تراكم الاخطاء يمكن تمثيله على النحو الاتي :

$$\delta_y^2=(\frac{\partial F}{\partial x_1})^2\delta_{x_1}^2+(\frac{\partial F}{\partial x_2})^2\delta_{x2}^2+\cdots+(\frac{\partial F}{\partial x_n})^2\delta_{xn}^2 ....[2-5]$$

اي انه :

(الخطأ القياسي للقياس غير المباشر "y")^2 = (المشتقة الجزئية للدالة "f" نسبة للمتغير الاول)^2 *(الخطأ القياسي للمتغير الاول)^2 +(المشتقة الجزئية للدالة نسبة الى المتغير الثاني)^2 * (الخطأ القياسي للمتغير الثاني)^2 +.....+ (المشتقة الجزئية للدالة نسبة الى المتغير الاخير)^2 *(الخطأ القياسي للمتغير الاخير)^2

2-7-2-2 بالامكان حساب اكثر من قيمة للقياس غير المباشر:

في هذه الحالة من الممكن حساب اكثر من قيمة للقياس او القياسات غير المباشرة من خلال تطبيق علاقة او علاقات رياضية تربط هذا المتغير او المتغيرات بمتغيرات اخرى تمثل قياسات مباشرة او غير مباشرة قيمها معلومة والخطأ القياسي لكل منها معلوم ايضاً.

بعبارة اخرى توجد لدينا دالة او دوال رياضية تربط القياسات غير المباشرة المجهولة$(y_1,y_2,\ldots,y_u)$ (u = عدد المتغيرات المجهولة) بمتغيرات اخرى (قياسات مباشرة او غير مباشرة) معلومة $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (n= عدد المتغيرات المعلومة). عند تطبيق هذه الدالة او الدوال الرياضية ينتج لدينا عدد من المعادلات الرياضية اكبر من عدد المجاهيل $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$

[أي انه بالامكان الحصول على اكثر من قيمة لكل من المتغيرات المجهولة $(y_1,y_2,\ldots,y_u)$].

∴في هذه الحالة بالامكان حساب القيمة لاكثر احتمالية ”Most probable value“، والتي تمثل افضل قيمة، لكل من المتغيرات (القياسات) المجهولة $(y_1,y_2,\ldots,y_u)$ والخطأ القياسي لكل منها $(\delta_{y_1},\delta_{y_2},\ldots,\delta_{y_u})$ من خلال استخدام طريقة المربعات الصغرى فقط

”Least squares method“. لكون ان مادة المساحة ”Surveying“ هي عبارة عن قياسات واخطاء والمطلوب في أي عمل مساحي ان تكون القيم النهائية لهذه القياسات قريبة قدر المستطاع من القيم الحقيقية ”True values“ لها، اضافة الى وصف (تمثيل) مدى جودة هذه القياسات من خلال تحديد الخطأ القياسي لها. لهذه الاسباب، فانه قبل البدء في تناول المفردات التطبيقية لموضوع المساحة ولجميع انواع القياسات، باستخدام اجهزة المساحة المستوية، ملزم علينا اعطاء شرح تفصيلي الى كيفية الحصول على القيمة الاكثر احتمالية

"Most probable value" (= افضل قيمة) والخطأ القياسي لها بطريقة المربعات الصغرى "Least squares method"، لسبب بسيط، هو انه عند تناول أي موضوع من مواضيع المساحة، علينا تحديد القيمة الاكثر احتمالية (افضل قيمة) والخطأ القياسي للقياسات التي يتم اجراءها والقياسات المطلوب تحديدها.

2-8 القيمة الاكثر احتمالية والخطأ القياسي للقياسات غير المباشرة.
"Most probable value and standard error for Indirect Meas"

2-8-1 وزن القياس Weight of measurement

من الواضح ان بعض القياسات تتم باتقان افضل من قياسات اخرى بسبب استخدام اجهزة افضل وبظروف جوية احسن واعطاء اهتمام وعناية بدرجة افضل، لذلك عند اجراء تعديل القياسات "Adjustments of measurements" لاجل الحصول على افضل قيمة للمتغير المقاس، من الضروري اعطاء اوزان نسبية "Relative weight" لكل مجموعة من القياسات. من الطبيعي القياس الذي له اتقان عالي يكون الخطأ القياسي "Standard Error" له صغير، وبالتالي يجب اعطاءه وزن اكبر (أثقل) [الحفاظ على قيمته بحيث تكون اقرب ما يمكن الى قيمته المقاسة] من القياس الذي له اتقان واطيء، الخطأ القياسي له كبير [السماح بتغير نسبي في قيمته المقاسة] عند تعديل "Adjustment" القياسات.

ولهذه الاسباب فان وزن أي مجموعة من القياسات يجب ان توجد له علاقة باتقان "Precision" المجموعة، لذلك فان الوزن يتناسب عكسياً مع "Variance" (δ^2)، أي ان:

$$P_a \alpha \frac{1}{\delta_a^2} \quad \cdots\cdots\cdots [2-6]$$

حيث ان:

$P_a =$ وزن المتغير "variable" المقاس "a"

$\delta_a^2 =$ variance المتغير المقاس "a"

= (الخطأ القياسي standard error للمتغير المقاس "a")^2

خلاصة لذلك، عند اجراء عملية تعديل القياسات "Adjustments of measurement" لعدد من المتغيرات فيها متغيرات مقاسة ذات اوزان مختلفة، عليه يجب اعطاء هذه المتغيرات اوزان تتناسب عكسياً مع (δ_a^2) لكل من هذه المتغيرات [عادة، يؤخذ $P_a = \frac{1}{\delta_a^2}$].

2-8-2 تعديل القياسات بطريقة المربعات الصغرى
"Adjustments of measurements by the least square Method"

اشارة الى ماتم ذكره سابقاً في [2-2-7-2] فان طريقة المربعات الصغرى هي الطريقة الامثل (الوحيدة) لتعديل القياسات "Adjustment of Measurements" في حالة وجود امكانية لحساب اكثر من قيمة للقياسات غير المباشرة $(y_1, y_2, \ldots, y_u)$ من تطبيق دالة او دوال رياضية تربط هذه المتغيرات بمتغيرات اخرى $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، حيث ان المتغيرات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عبارة عن قياسات مباشرة او غير مباشرة قيمها معلومة والخطأ القياسي لها معلوم ايضاً.

قبل البدء في تطبيق طريقة المربعات الصغرى يجب:

1. ازالة (حذف) القياسات الغلط "Mistakes".
2. تصحيح القياسات للاخطاء المنتظمة "Systematic errors".

وان كل ماتبقى لدينا هو الاخطاء العشوائية "Random errors" فقط يتم التعامل معها عند اجراء تعديل القياسات "Adjustment of Measurements" بطريقة المربعات الصغرى. ان المبدأ (الشرط) الاساسي الذي تم اعتماده بطريقة المربعات الصغرى هو:

1. في حالة وجود مجموعة (m) من القياسات لها نفس الوزن، أي ان المتغيرات "Variables" عبارة عن قياسات متساوية الوزن "Equal weight".
المبدأ الذي يتم اعتماده بطريقة المربعات الصغرى في هذه الحالة هو:

$$\sum_{i=1}^{m} V_i^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \cdots + V_m^2 = \min \qquad \cdots\cdots[2-7]$$

أي ان مجموع مربعات الاخطاء المتبقية min = residuals (الحد الادنى).

2. في حالة وجود مجموعة (m) من القياسات لها اوزان مختلفة "different weight".
المبدأ (الشرط condition) الذي يتم اعتماده بطريقة المربعات الصغرى هو:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i V_i^2 = P_1 V_1^2 + P_2 V_2^2 + P_3 V_3^2 + \cdots + P_m V_m^2 = \min \qquad \cdots\cdots[2-8]$$

حيث ان P_i = وزن المتغير المقاس i ، اشارة الى ما تم ذكره في [2-8-1]، يمكن حساب وزن أي قياس من خلال تطبيق العلاقة الاتية:

$$P_i = \frac{1}{\delta_i^2} \qquad \cdots\cdots[2-9]$$

هناك عدد من الاساليب "approaches" لتعديل القياسات بطريقة المربعات الصغرى اهمها:

1. Observation method.
2. Condition method.
3. Observation method with constraints.

اهم هذه الطرق واكثرها شيوعاً للاستخدام في اعمال المساحة هي طريقة القياسات "observation method".

2-8-3 طريقة القياسات "Least Squares Observation Method"

يمكن ايجاز العمل بهذه الطريقة بالخطوات الاتية:

1. كتابة معادلة قياس "Observation Equation" لكل من المتغيرات المقاسة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ومن غير الممكن ان تحتوي أي معادلة على اكثر من قياس واحد من هذه القياسات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وبهذا يصبح لدينا عدد "n" من المعادلات مساوي الى عدد المتغيرات المقاسة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
ويمكن كتابة معادلة القياسات "Observation Equation" النهائية المتكونة وبصيغة مصفوفات "Matrix form":

$$_nA_{u\,u}X_1 - {}_nL_1 = {}_nV_1 \qquad \cdots\cdots[2-10]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots[2-11]$$

حيث ان $_nA_u =$ مصفوفة معاملات المتغيرات المجهولة $(y_1, y_2, \ldots, y_u)$

$_uX_1 =$ مصفوفة المتغيرات المجهولة $(y_1, y_2, \ldots, y_u)$

${}_nL_1 =$ مصفوفة تمثل القيمة الرقمية لكل معادلة والتي عادة تمثل قيمة المتغير المقاس في المعادلة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ أي ان $L_n = x_n, \ldots, L_2 = x_2, L_1 = x_1$

${}_nV_1 =$ مصفوفة الاخطاء المتبقية "residuals"

$n =$ عدد القياسات $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ n= number of observations

= عدد المعادلات = number of equations

$u =$ عدد المتغيرات المجهولة $(y_1, y_2, \ldots, y_u)$ u= Number of unknowns

اشارة الى ما تم ذكره في [2-2-7-2] سابقاً فان $n > u$ ، أي ان عدد المعادلات "n" اكبر من عدد المجاهيل "u".

2. تكوين الـ "Normal Equation"

$${}_uN_u\,{}_uX_1 = {}_uD_1 \ldots\ldots[2-12]$$

حيث ان:

$${}_uN_u = {}_uA_n^T\,{}_nP_n\,{}_nA_u \ldots\ldots[2-13]$$

$${}_uD_1 = {}_uA_n^T\,{}_nP_n\,{}_nL_1 \ldots\ldots[2-14]$$

$${}_nP_n = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_{nn} \end{bmatrix} = Weight\ Matrix \quad \ldots\ldots[2-15]$$

$P_{11} =$ وزن المتغير المقاس الاول $[x_1] = \dfrac{1}{\delta^2 x_1}$

$P_{22} =$ وزن المتغير المقاس الثاني $[x_2] = \dfrac{1}{\delta^2 x_2}$

$P_{nn} =$ وزن المتغير المقاس الاخير $[x_n] = \dfrac{1}{\delta^2 x_n}$

في حالة كون اوزان القياسات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ متساوية فان المصفوفة ${}_nP_n$ تصبح المصفوفة احادية، أي ان: $P_{11} = P_{22} = \ldots = P_{nn} = 1$

$${}_nP_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

فاذن في هذه الحالة تصبح المصفوفات D, N على النحو الاتي:

$${}_uN_u = {}_uA_n^T\,{}_nA_u \quad \ldots\ldots[2-17]$$

$${}_uD_1 = {}_uA_n^T\,{}_nL_1 \quad \ldots\ldots[2-18]$$

3. حل "Normal Equation" معادلة [2-12]

$$\therefore X = N^{-1}D \quad ......[2-19]$$

حيث ان:

N^{-1} = معكوس "inverse" المصفوفة N وبهذا يتم الحصول على القيمة الاكثر احتمالية (افضل قيمة) "Most probable value" للمتغيرات المجهولة $[{}_uX_1]$ "unknown variables" والتي تمثل القياسات غير المباشرة $(y_1, y_2, \dots, y_u)$.

4. حساب الخطأ القياسي "$\delta_{y_1}, \delta_{y_2}, \dots, \delta_{y_u}$" للمتغيرات (القياسات غير المباشرة) $(y_1, y_2, \dots, y_u)$ وعلى النحو الاتي:

أ. حساب قيم الاخطاء المتبقية "residuals" "$V_1, V_2, \dots V_n$" والتي تمثل قيم المصفوفة ${}_nV_1$ والتي يمكن الحصول عليها بحل المعادلة [2-10]، أي ان:

$$\therefore V = AX - L$$

ب. حساب الخطأ القياسي لوحدة وزن واحدة "δ_0"

$$\delta_0 = \pm\sqrt{\frac{V^T P V}{n-u}} \quad ......[2-20]$$

حيث ان:

δ_0 = الخطأ القياسي لوحدة وزن واحدة

= standard error of unit weight

في حالة كون القياسات $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ متساوية الوزن فان المعادلة [2-20] تصبح على النحو الاتي:

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n-u}} \quad ......[2-21]$$

ج. حساب الخطأ القياسي لاي من المتغيرات: $(y_1, y_2, \dots, y_u)$

$${}_uQ_u = {}_uN_u^{-1} \quad ......[2-22]$$

$$\delta_{y_i} = \delta_0 \times \sqrt{q_{ii}} \quad ......[2-23]$$

حيث ان q_{ii} = القيمة القطرية "ii" للمصفوفة Q

<u>مثال (1):</u> استخدم شريط قياس لقياس المسافة الافقية AB وكانت القياسات على النحو الاتي: $D_{AB} = 18.264m, 18.268m, 18.257m, 18.259m$، احسب افضل قيمة (القيمة الاكثر احتمالية "Most probable value" للمسافة AB والخطأ القياسي لها باستخدام طريقة المربعات الصغرى (على افتراض ان هذه لقياسات متساوية الوزن).

<u>الحل:</u>

في هذا المثال عدد المتغيرات المقاسة $(x_1, x_2, \dots, x_n)$، n=4، حيث ان:

$x_1 = 18.264m,\ x_2 = 18.268.m,\ x_3 = 18.257m,\ x_4 = 18.259m$

وان عدد المتغيرات (القياسات غير المباشرة) $(y_1, y_2, \dots, y_u)$ 1 U وليكن y

[أي ان: $y = D_{AB}$]. توجد لدينا علاقة رياضية واحدة تربط المتغير (القياس غير المباشر) "y" بالمتغيرات المقاسة "x_1, x_2, x_3, x_4" وهي $[n = 4]$ $i = 1,\ldots,n$ $y = x_i$ اشارة الى ماتم ذكره في [2-8-3]، يمكن حل المثال بطريقة "Observation Method" باتباع الخطوات الاتية:

1. كتابة observation Equation $AX - L = V$ ان العلاقة الرياضية الموجودة هي: $y = x_i \quad , i = 1,2,\ldots,4$ وبتطبيق هذه العلاقة الرياضية يمكن الحصول على اربع (4) معادلات رياضية:

$$y = x_1$$
$$y = x_2$$
$$y = x_3$$
$$y = x_4$$

بما ان المتغيرات "x_1, x_2, x_3, x_4" هي عبارة عن متغيرات مقاسة غير خالية من الاخطاء، لذلك ومن اجل الحصول على معادلات صحيحة من الناحية الرياضية، يجب اضافة V_i لكل من المتغيرات المقاسة $x_i \quad i = 1,2,\ldots,4$ وبهذا يتم الحصول على اربع [4] "observation Equation" وهي:

$$y = x_1 + v_1$$
$$y = x_2 + v_2$$
$$y = x_3 + v_3$$
$$y = x_4 + v_4$$

الصيغة النهائية لهذه المعادلات

$$y - x_1 = v_1$$
$$y - x_2 = v_2$$
$$y - x_3 = v_3$$
$$y - x_4 = v_4$$

يمكن كتابة هذه المعادلات بصيغة مصفوفات وعلى النحو الاتي:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [y] - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$${}_nA_u \; {}_uX_1 - {}_nL_1 = {}_nV_1$$

2. تكوين الـ Normal Equation: $NX = D$

بما ان المتغيرات المقاسة "x_1, x_2, x_3, x_4" متساوية الوزن،

$$\therefore N = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [4]$$

$$D = A^T L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = [x_1 + x_2 + x_3 + x_4]$$

$$\therefore [4][y] = [x_1 + x_2 + x_3 + x_4]$$
$$N \quad X = \quad D$$

3. حل "Normal Equation"

$$X = N^{-1} D$$
$$N^{-1} = \frac{1}{[4]}$$
$$\therefore y = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \bar{x}$$

(و.هـ.م)

وهي معادلة المعدل "mean" [2-1]

$$y = \frac{18.264 + 18.268 + 18.257 + 18.259}{4} = 18.262m$$
$$\therefore D_{AB} = 18.262m$$

4. حساب الخطأ القياسي δ_y

أ. حساب قيم الاخطاء المتبقية v_1, v_2, v_3, v_4

$$V = AX - L$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [18.262] - \begin{bmatrix} 18.264 \\ 18.268 \\ 18.257 \\ 18.259 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.006 \\ +0.005 \\ +0.003 \end{bmatrix}$$

ب. حساب الخطأ القياسي لوحدة وزن واحدة δ_0 اشارة الى المعادلات [2-20] و [2-21]:

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-u}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} v_i^2}{4-1}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^4}{3}}$$
$$\delta_0 = \pm$$

ج. حساب الخطأ القياسي القياسي δ_y

$$Q = N^{-1} = \frac{1}{4} = \frac{1}{n}$$
$$\delta_y = \delta_0 \sqrt{q_{ii}} = \delta_0 \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{\delta_0}{\sqrt{n}}$$

وهي معادلة مطابقة للمعادلة [2-3]

$$\therefore \delta_y = \pm \frac{\delta_0}{\sqrt{n}} = \pm \frac{}{\sqrt{4}} = \pm \quad m$$
$$D_{AB} = \quad m \pm \quad m$$

<u>مثال (2)</u>: استخدم شريط قياس لقياس المسافة الافقية AB من قبل ثلاثة مجاميع وكانت نتائج القياسات على النحو الاتي:
$18.262m \pm 0.004m, 18.254m \pm 0.003m, 18.265 \pm 0.006m$ احسب افضل قيمة للمسافة AB $[D_{AB}]$ والخطأ القياسي لها.

<u>الحل</u>: في هذا المثال المتغيرات المقاسة $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ لها اخطاء قياسية مختلفة وبالتالي فان اوزانها مختلفة، حيث ان:

$$x_1 = 18.262m, \quad \delta x_1 = 0.004m \rightarrow P_1 = \frac{1}{\delta_{x_1}^2}$$
$$x_2 = 18.254m, \quad \delta x_2 = 0.003m \rightarrow P_2 = \frac{1}{\delta_{x_2}^2}$$
$$x_3 = 18.265m, \quad \delta x_3 = 0.006m \rightarrow P_3 = \frac{1}{\delta_{x_3}^2}$$

حيث ان $P_3, P_2, P_1 =$ وزن المتغير المقاس x_3, x_2, x_1 على التوالي يمكن ايجاز الحل على النحو الاتي:

1. تكوين الـ "observation equation" $AX - L = V$ هذا المثال مشابه الى مثال (1) والفرق الوحيد هو ان المتغيرات المقاسة x_1, x_2, x_3 لها اوزان مختلفة في هذا المثال:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [y] - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$
$${}_nA_u \, {}_uX_1 - {}_nL_1 = {}_nV_1$$

2. تكوين الـ Normal Equation $NX = D$
بما ان المتغيرات المقاسة x_1, x_2, x_3 لها اوزان مختلفة تطبق المعادلات [2-13]،

[2-14] لحساب المصفوفات D, N على التوالي:

$$\therefore {}_1N_1 = {}_1A^T_3\,{}_3P_3\,{}_3A_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & 0 & 0\\ 0 & p_2 & 0\\ 0 & 0 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\therefore {}_1N_1 = \begin{bmatrix}p_1 + p_2 + p_3\end{bmatrix}$$

$${}_1D_1 = {}_1A^T_3\,{}_3P_3\,{}_3L_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & 0 & 0\\ 0 & p_2 & 0\\ 0 & 0 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\therefore {}_1D_1 = \begin{bmatrix}p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}p_1 + p_2 + p_3\end{bmatrix}X = \begin{bmatrix}p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3\end{bmatrix}$$

3. حل الـ"Normal Equation" $X = N^{-1}D$

$${}_1N_1^{-1} = \frac{1}{\begin{bmatrix}p_1 + p_2 + p_3\end{bmatrix}}$$

$$y = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3}{p_1 + p_2 + p_3} \qquad \ldots\ldots[2-24]$$

هذه المعادلة [2-24] تسمى بمعادلة **المعدل الموزون** أي ان:

$$\text{المعدل الموزون} = \frac{\text{القياس الاول}\times\text{وزنه} + \text{القياس الثاني}\times\text{وزنه} + \ldots}{\text{مجموع الاوزان}}$$

4. حساب الخطأ القياسي δ_y:

أ. حساب المصفوفة V:

$$V = AX - L$$

$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\quad\quad\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}18.262\\18.254\\18.265\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\quad\\ \quad\\ \quad\end{bmatrix}$$

ب. حساب δ_0 بتطبيق المعادلة [2-20]

$$\delta_0=\sqrt{\frac{V^TPV}{n-u}} \quad ,V^TPV=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & 0 & 0\\ 0 & p_2 & 0\\ 0 & 0 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}$$

$$\therefore V^TPV=p_1v_1^2+p_2v_2^2+p_3v_3^2$$

$$n=3,\ u=1$$

$$\delta_0=\sqrt{\frac{p_1v_1^2+p_2v_2^2+p_3v_3^2}{3-1}}$$

$$\therefore \delta_0=\pm$$

$$Q=N^{-1}\frac{1}{[p_1+p_2+p_3]}$$

$$\therefore \delta_y=\delta_0\sqrt{q_{ii}} \quad =\pm\frac{\delta_0}{\sqrt{p_1+p_2+p_3}}$$

$$\therefore D_{AB}= \qquad m\pm \qquad m$$

2-9 الخلاصة summary

A- المساحة "surveying" عبارة عن قياس وخطا ، ولايوجد اي قياس في تطبيقات الهندسة المدنية بشكل عام وفي المساحة بشكل خاص خالي من الاخطاء .
لذلك فان القيمة الحقيقية "true value" لاي قياس مجهول ولايمكن الحصول عليها في اي حال من الاحوال ونحن نبحث للحصول على افضل قيمة للقياس والتي من الناحية الاحصائية تمثل القيمة الاكثر احتمالية "Most probable value" التي يمكن الحصول عليها بتطبيق علاقات احصائية معينة [اهمها وافضلها طريقة المربعات الصغرى "Least squarer method"]، التي تعتمد (تفترض) ان جميع القياسات تنتمي الى منحني التوزيع الطبيعي "Normal distribution curve".

B- لحساب افضل قيمة والخطا القياسي لها يجب اتباع الخطوات الاتية :

1. ازالة (حذف) القياس او القياسات الغلط Mistake ان وجدت وعليه يجب تكرار اي قياس مرتين واكثر . وفي حالة وجود غلط Mistake (قيمة الخطا في النتائج كبيرة) وتعذر معرفة او اكتشاف القياس الغلط يجب اعادة العمل الحقيقي بالكامل .
2. تصحيح القياسات للاخطاء المنتضمة ان وجدت وذلك من خلال تطبيق العلاقات الرياضية التي تربط تلك الاخطاء بالقياسات .
3. في هذه المرحلة يوجد لدينا قياس او قياسات فيها اخطاء عشوائية فقط .

والمطلوب هو حساب افضل قيمة لهذه القياسات والخطا القياسي لها وذلك من خلال تطبيق طريقة المربعات الصغرى "Least squarer method"

C. حساب افضل قيمة والخطا القياسي لها بطريقة المربعات الصغرى "Least square method".

بالامكان ايجاز العمل بهذه الطريقة وفق الخطوات الاتية:

1. كتابة العلاقة (المعادلة) او العلاقات (المعادلات) الرياضية "Mathematical equations" التي تربط مابين المتغير او المتغيرات (القياسات) المجهولة "$y=y_1,y_2,\ldots,y_u$" والمتغير او المتغيرات (القياسات) المعروفة "$x=x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n$"

$$y=f(x=x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n)$$

حيث ان u عدد القياسات المجهولة

n = عدد القياسات المعلومة عدد المعادلات

ويجب ان يكون دائما $u \le n$

2. في حالة كون عدد المتغيرات (القياسات) المجهولة "y" = 1 u اي انه يوجد لدينا مجهول واحد في هذه الحالة يتم اتباع الخطوات التالية :

a) تطبيق معادلة المعدل الموزون (2-24) لحساب افضل قيمة للقياس المجهول y

$$y=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n}{p_1+p_2+\dots+p_n}$$

حيث ان p_i = وزن " weight" القياس المعروف "$i= 1,\ldots,n$"

$$=\frac{1}{\delta^2_{x_i}}$$

كما هو الحال في المثال 2 ص 22

b) حساب δ_o

$$\delta_o=\pm\sqrt{\frac{p_1v_1^2+p_2v_2^2+\dots+p_nv_n^2}{n-1}}$$

$$v_i=y-x_i$$

c) حساب δ_y

$$\delta_y \quad \pm\frac{\delta_0}{\sqrt{p_1+p_2+\dots.+p_n}}$$

ملاحظة مهمة

في حالة كون القياسات المعروفة "$x=x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n$" لها نفس الوزن [متساوية الوزن equal weight].

في هذه الحالة يتم اعطاء قيمة (1) لجميع الاوزان [$p_1=p_2\ldots\ldots\ldots\ldots=p_n=1$]

في a,b,c, اعلاه كما هو الحال في المثال1 ص19

3- في حالة كون المتغيرات (القياسات) المجهولة y اكثر من مجهول واحد [u=2,3,…].
في هذه الحالة يتم تطبيق مبدأ المصفوفات Matrices والحل بطريقة القياسات Observation Method بألاسلوب الذي تم شرحه مسبقاً .وأن الطالب غير مطالب فيه في الوقت الحاضر (للأطلاع فقط).

D- في حالة وجود علاقة (معادلة) رياضية واحدة تربط مابين القياس المجهول "y" والقياسات المعروفة $x_1,x_2,\dots\dots..,x_n$.

في هذة الحالة يتم اتباع الخطوات التالية:

1- حساب افضل قيمة للقياس المجهول y بتطبيق المعادلة الرياضية (واحدة فقط) التي تربط مابين y والقياسات المعروفة $x_1,x_2,\dots\dots..,x_n$ x .

2- يتم حساب الخطأ القياسي δ_y بتطبيق قانون تراكم الاخطاء low of error propagation [معادلة 5-2] .

2-10 اسئلة وحلول

مثال

حول $142^\circ 22' 14.5''$ الى التقدير المئوي.

الحل:

تحول الثواني الى دقائق: $\frac{14.5''}{60} = 2.242'$

تحول مجموع الدقائق الى الدرجات $\frac{22.242'}{60} = 0.3707^\circ$

$\therefore$ مجموع الدرجات $142^\circ + 0.3707^\circ = 142.3707^\circ$

ثم يحول مجموع الدرجات الى كراد فتساوي:

$$142.3707^\circ \times \frac{360_g}{400^\circ} = 158.18967_g$$

مثال

حول 324.4625_g الى الدرجات, الدقائق, الثواني.

الحل:

تحول الكراد الى الدرجات

$$324.4625 \times \frac{360}{400} = 292.01625^\circ$$

ثم تحول اجزاء الدرجة وهي 0.01625 الى دقائق

$0.01625 \times 60 = 0.975$ دقيقة (لاتوجد دقائق كاملة)

ثم تحول اجزاء الدقيقة وهي 0.975 الى الثواني,

$0.975 \times 60 = 58.5$ ثانية

فالنتيجة هي: $292^\circ 00' 58.5''$

مثال

حول $37^\circ 14' 53.6''$ الى التقدير الدائري.

الحل

تحول الثواني الى الدقائق

$\frac{53.6}{60} = 0.89333$ دقيقة

يحول مجموع الدقائق الى درجات

$\frac{14.89333}{60} = 0.24822$ درجة

يحول مجموع الدرجات الى التقدير الدائري

$37.24822 \times \frac{\pi}{180} = 0.65010$ ريدين (زاوية نصف قطرية)

تمارين:

حول مايأتي الى الدرجات الدقائق وثوان بالتقدير الستيني.

1- 325.6012_g

100.5001_g -2
200.9802_g-3
$309_g80^c25^{cc}$-4

حول مايأتي الى درجات, دقائق, ثواني بالتقدير المئوي.

$60^\circ 35' 28''$

$187^\circ 56' 50''$

$320^\circ 41' 23''$

201.0092°

حول مايأتي الى التقدير الدائري.

$37^\circ 14' 49''$

$142^\circ 22' 14''$

$119^\circ 59' 58''$

335.00459_g

س:قطعة ارض ابعادها (1350 مترا X 1920 مترا). احسب مساحتها بالامتار المربعة. الكيلومترات المربعة. الدونم.

س: شاخص عرضة 3 سنتيمترات وضع على بعد 3.5 متر من نقطة الرصد, احسب الزاوية المحصورة بين جانبي الشاخص بالتقدير الستيني, الدائري, و المئوي.

مثال:
بركة عرضها 15 مترا وطولها 30 مترا و ارتفاعها 3.5 متر يراد دفنها بالاتربة. احسب الكميات الترابية اللازمة بالسنتيمترات المكعبة و الامتار المكعبة.

مثال:
اذا كانت المسافة بين النقطتين A وB هي 1250 مترا, ماهي المسافة بين النقطتين بالكيلومتر, السنتيميتر. و الملميتر, و القدم؟

مثال:
قطعة ارض مساحتها 2500مترا مربعا, رسمت على ورقة بمقياس $\frac{1}{1000}$. ماهي مساحتها على الخارطة؟

الحل:
بما ان المقياس $\frac{1}{1000}$, فأن 1 سنتيمترا على الخارطة يقابل 10 امتار على الطبيعة و كذلك 1 سم^2 على الخارطة 10X10 100 م^2 على الطبيعة.
اذن مساحة الارض على الخارطة $\frac{2500}{10\times10}=25$سنتمترا مربعا.

س:ماهو مقياس الرسم؟ولماذا يجب استخدامه؟

س:قيست المسافة بين بغداد و بابل على خارطة مقياسها $\frac{1}{2000000}$ فكانت 5 سنتمترات. ثم قيست على خارطة ثانية بدون مقياس فكانت 2 سنتسمترا. ما هو مقياس رسم الخارطة الثانية؟

س:قيست مساحة قطعة ارض على خارطة مقياسها $\frac{1}{3000}$ وكانت ابعادها 25سمX17سم. ماهي مساحة قطعة الارض على الطبيعة بالدونم؟

س:قيست المسافة بين النقطتين Aو B بشريط طوله 30 مترا فكانت 120.15 مترا وعند معايرة الشريط وجد ان طوله 30.10 متر. ماهو الطول الحقيقي للخط؟

س:ماهو جهاز التسوية وماهي فوائده؟

س:كيف يتم حساب المسافة بين المسطرة وجهاز التسوية؟

س:لماذا يفضل نصب جهاز التسوية في منتصف المسافة بين النقطتين؟